

Universidad de Buenos Aires
Facultad de Ingeniería

66.06 – Análisis de Circuitos

Trabajo Práctico: diseño de un filtro

Barrios, Federico – 91954
fbarrios@live.com.ar

1.^{er} cuatrimestre 2012

Índice

1. Enunciado	3
2. Análisis	3
3. Circuito propuesto	5
3.1. Normalización de componentes	7
4. Respuesta a excitaciones	8
4.1. Respuesta a “bass drum”	8
4.2. Respuesta al impulso	9
4.3. Respuesta al escalón	9
4.4. Respuesta a la onda cuadrada	10
4.5. Respuesta a la onda senoidal	10
5. Diagrama de polos y ceros	10
6. Respuesta en frecuencia	11
7. Conclusiones	13
A. Apéndice: obtención de transferencias	14
A.1. Filtro pasabandas	14
A.2. Filtro elimina bandas	15
A.3. Rotador de fase	16

1. Enunciado

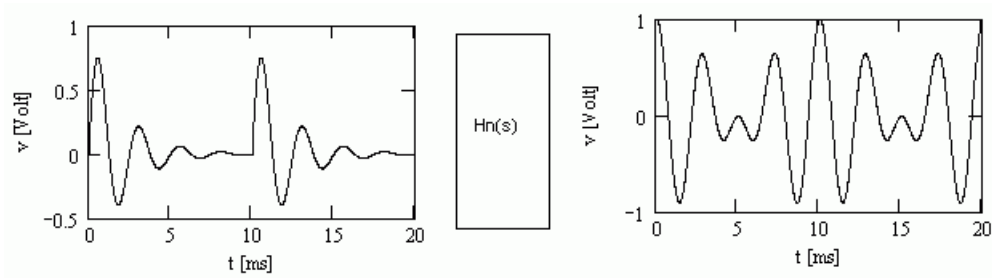


Figura 1: (izquierda) señal “bass drum” de entrada; (derecha) señal de salida.

El trabajo práctico consistió en el diseño de un circuito lineal que transforme la señal “bass drum” mostrada en la figura 1 (izquierda) en la señal mostrada en la figura 1 (derecha).

Se pidió que la señal de salida esté compuesta por dos armónicos y que todo contenido de otros armónicos sea menor a 6 mV RMS. Se especificó, también, que se debían usar componentes normalizados y amplificadores operaciones comerciales alimentados con ± 5 V, además de las normas generales de realización de trabajos prácticos del curso.¹

Para la resolución del problema se usó la aplicación Mathcad 11 como herramienta de cálculo simbólico y el paquete Orcad 9.2. Se adjunta en el apéndice todos los desarrollos matemáticos correspondientes a los resultados presentados.

2. Análisis

Se obtuvieron las expresiones de las señales de entrada (ecuación 1, mostrada en la figura 2 (izquierda)) y salida (ecuación 2, mostrada en la figura 2 (derecha)) para luego poder hacer un análisis de espectro usando la transformada rápida de Fourier (FFT), mostrado en la figura 3 (izquierda: señal de entrada, derecha: señal de salida). Este análisis determinó qué filtros usar a la hora de cumplir con las especificaciones del enunciado.

$$v_{in}(t) = \text{sen}(4\omega_0 t) e^{-\frac{t}{200}} \quad (1)$$

$$v_{out}(t) = \frac{1}{2} [\cos(3\omega_0 t) + \cos(4\omega_0 t)] \quad (2)$$

Una vez conocidas las frecuencias de los armónicos que componen la señal de salida se decidió usar dos filtros pasabandas en las frecuencias de 300 Hz y 400 Hz, cuya transferencia está descripta según:

$$T(s) = \frac{-H_0 \frac{\omega_0}{Q} s}{s^2 + \frac{\omega_0}{Q} s + \omega_0^2} \quad (3)$$

¹Disponibles en el archivo Normas_de_TP.pdf.

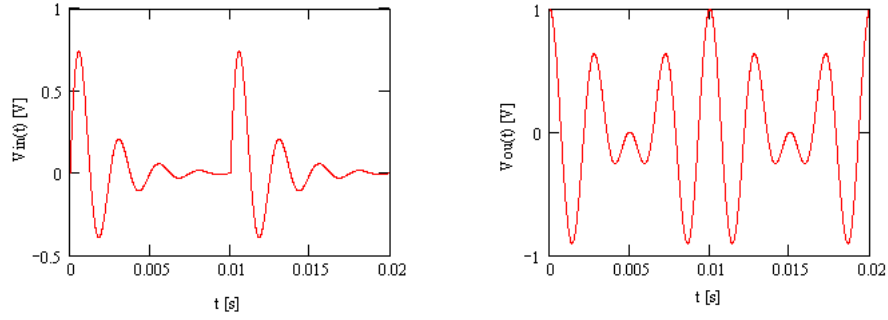


Figura 2: (izquierda) parametrización de la señal “bass drum” de entrada; (derecha) parametrización de la señal de salida.

Tanto los parámetros de factor de mérito Q como las ganancias H_0 de cada filtro fueron incógnitas y se eligieron por prueba y error teniendo en cuenta que el ruido proveniente de otros armónicos debe ser menor que 6 mV RMS y que la señal de salida debe tener una amplitud de 1 V. También se tuvo en cuenta que el valor del factor Q debe estar acotado entre 9 y 12, de otra manera se habría imposibilitado la tarea de obtener valores normalizados de componentes para la implementación circuital.

Hasta este momento, la transferencia del filtro resulta de hacer el producto de la ecuación 3 consigo misma para dos frecuencias diferentes:

$$Hn(s) = A \frac{\frac{\omega_1}{Q_1} s}{s^2 + \frac{\omega_1}{Q_1} s + \omega_1^2} \frac{\frac{\omega_2}{Q_2} s}{s^2 + \frac{\omega_2}{Q_2} s + \omega_2^2}$$

siendo A la multiplicación de las ganancias H_1 con H_2 .

Sin embargo, con esta configuración fue imposible mantener el nivel de ruido por debajo de lo establecido en las normas del diseño. Como la frecuencia del armónico indeseado que más aparecía en la salida era de 500 Hz, se decidió agregar un filtro elimina banda cuya transferencia es:

$$T(s) = \frac{s^2 + \omega_0^2}{s^2 + 4\omega_0 s + \omega_0^2} \quad (4)$$

Habiendo agregado el notch, se observó que el ruido proveniente de armónicos no deseados disminuyó a niveles aceptables, sin embargo no se pudo encontrar

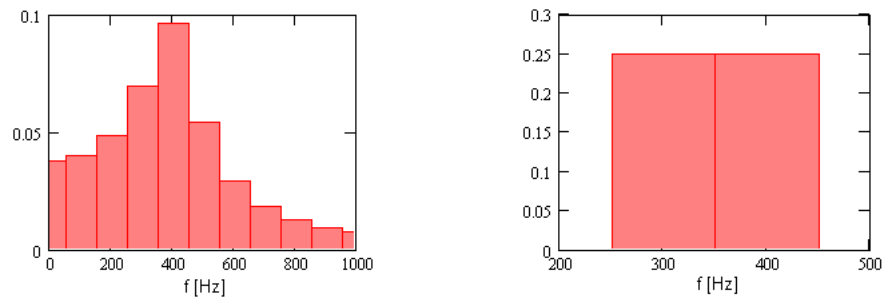


Figura 3: (izquierda) espectro de la señal de entrada; (derecha) espectro de la señal de salida.

valores para los Q que cumplieran las condiciones antes mencionadas. Por ello fue necesario agregar dos etapas más de filtrado. Además, dado que el defasaje entre los armónicos conservados debe ser nulo, se agregó un rotador de fase, cuya transferencia es:

$$T(s) = -\frac{\varphi - s}{\varphi + s} \quad (5)$$

La expresión de la transferencia se obtuvo multiplicando las ecuaciones 3 (dos veces, porque se filtran dos frecuencias; y elevadas al cuadrado, ya que hay dos etapas de cada una) y las ecuaciones 4 y 5, resultando:

$$Hn(s) = A \left(\frac{\frac{\omega_1}{Q_1} s}{s^2 + \frac{\omega_1}{Q_1} s + \omega_1^2} \right)^2 \left(\frac{\frac{\omega_2}{Q_2} s}{s^2 + \frac{\omega_2}{Q_2} s + \omega_2^2} \right)^2 \frac{s^2 + \omega_3^2}{s^2 + 4\omega_3 s + \omega_3^2} (-1) \frac{\varphi - s}{\varphi + s} \quad (6)$$

siendo $A = 700$, $Q_1 = 9,27$, $Q_2 = 12,03$, $\omega_1 = 2\pi 300$, $\omega_2 = 2\pi 400$, $\omega_3 = 2\pi 500$ y $\varphi = 2\pi 85$. Estos valores fueron calculados por prueba y error observando el espectro de la señal de entrada una vez ingresado al filtro y la señal de armónicos no deseados.

Se muestra en la figura 4 el funcionamiento del filtro de la ecuación 5 ante la señal de la figura 2 (izquierda).

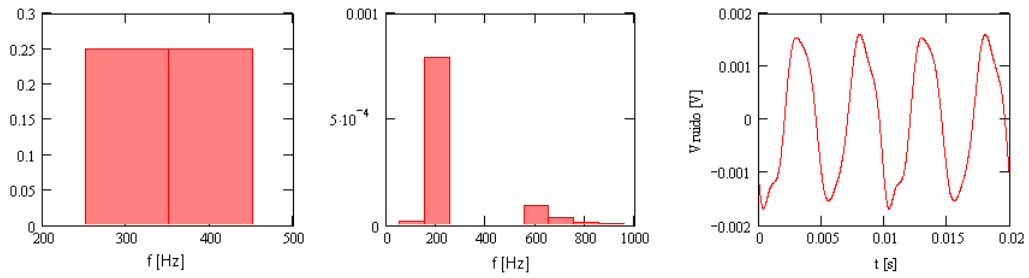


Figura 4: respuesta del filtro ante la señal de entrada “bass drum”. (Izquierda) espectro de la salida; (medio) espectro de los armónicos no deseados; (derecha) salida en función del tiempo.

3. Circuito propuesto

Los desarrollos de todas las transferencias usadas en esta sección se encuentran en el apéndice de este documento.

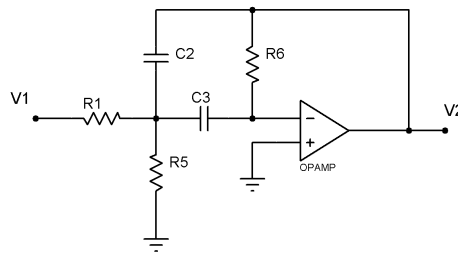


Figura 5: circuito pasabanda de realimentación múltiple y ganancia infinita.

Los circuitos pasabandas fueron implementados con filtros de realimentación múltiple y ganancia infinita (circuito mostrado en la figura 5) dado que son poco sensibles a variaciones en los valores de sus resistencias y capacitores. Los componentes en los filtros pasabanda a utilizar cumplen las siguientes relaciones:

$$\omega_0^2 = \frac{R_1 + R_5}{R_1 R_5 R_6 C_2 C_3} \quad (7)$$

$$\frac{1}{Q} = \sqrt{\frac{R_1 R_5 C_2 C_3}{R_6 (R_1 + R_5)}} \left(\frac{1}{C_2} + \frac{1}{C_3} \right) \quad (8)$$

$$H_0 = \frac{R_6}{R_1 (1 + \frac{C_2}{C_3})} \quad (9)$$

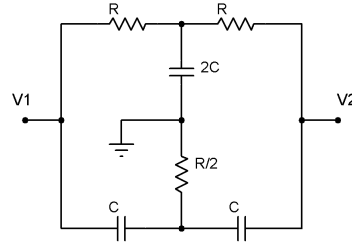


Figura 6: circuito elimina banda.

Se muestra en la figura 6 el circuito elimina banda, que tiene la transferencia descrita en la ecuación 4 y en donde se verifica:

$$Z_{1,2} = \pm j \frac{1}{RC} \quad (10)$$

$$\omega_0 = \frac{1}{RC} \quad (11)$$

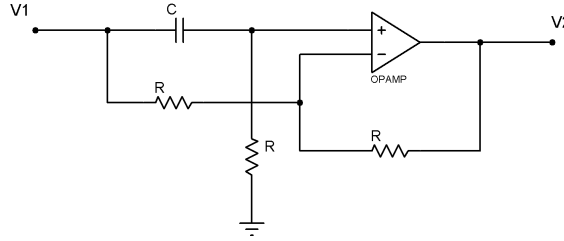


Figura 7: circuito regulador de fase.

Asimismo, en la figura 7 se ve el circuito rotador de fase utilizado, con la transferencia de la ecuación 5 y en donde se cumple:

$$\varphi = \frac{1}{RC} \quad (12)$$

3.1. Normalización de componentes

Para implementar el circuito se usaron resistencias de la serie E96 y capacitores de la serie E12 del estándar IEC 60063 y amplificadores operacionales TL084.

La normalización de los componentes del circuito regulador de fase y del notch fue sencilla, dado que las dependencias entre parámetros son simples, según indican las ecuaciones 10 y 12. En ambos casos se fijó un valor de C y se eligió un valor de resistencia para minimizar el error relativo.

En el caso del circuito elimina banda se establecieron $C = 27pF$ y $R = 11800\Omega$, obteniéndose un error relativo de ω_3 menor al 0,1 % del valor teórico.

Para el regulador de fase se calculó $C = 10pF$ y $R = 187000\Omega$, dando un error relativo de φ menor al 0,2 % del valor calculado teóricamente.

Sin dudas la normalización más complicada fue la de los componentes de los pasabandas, ya que todos los parámetros están fuertemente acoplados entre ellos. Para resolver el problema de encontrar la solución óptima se notó que al establecer capacidades del orden de los picofaradios, las resistencias R_5 eran varios órdenes de magnitud más chicas que el resto. Esto es muy importante al ver que R_5 se suma en paralelo con R_1 en las expresiones de ω_0 , por ende, una mala aproximación al par de R_5 significaba una pérdida de exactitud en el resultado final.

Al haber seis parámetros a establecer y cinco ecuaciones (dos de ω_0 , dos de Q y una de A), se obtienen infinitas soluciones que satisfacen el sistema. Se tomó provecho de esto fijando una de las dos R_5 en un valor normalizado y cambiando el valor de los capacitores. Se resolvió el sistema con ahora cinco incógnitas y se alteraron valores hasta que la R_5 del otro filtro esté considerablemente cerca de algún valor estándar.

Repitiendo este proceso varias veces se obtuvo una solución que deja a casi todos los parámetros con un error absoluto por debajo del 1 %. El ruido de armónicos no deseados se siguió manteniendo en la zona permitida y además las amplitudes finales no cambian más allá del 1 %. Dichos valores son, para el filtro pasabandas de 300 Hz: $R_1 = 1240\Omega$, $R_5 = 1330\Omega$, $R_6 = 237000\Omega$, $C_2 = 33pF$ y $C_3 = 56pF$. Para el pasabandas de 400 Hz, los valores finales son: $R_1 = 806000\Omega$, $R_5 = 1180\Omega$, $R_6 = 4990000\Omega$, $C_2 = 27pF$ y $C_3 = 1pF$.²

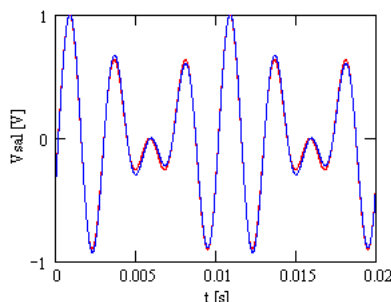


Figura 8: comparación entre la salida teórica y la salida normalizada ante la entrada de la señal “bass drum”.

²Las normas de resolución del trabajo práctico del curso indican que las resistencias no deben ser mayores a 4,7 K Ω , sin embargo, después de haberse simulado el circuito se observó que la corriente máxima a la salida de algún amplificador es menor a 20 μA .

Se muestra en la figura 8 la comparación entre la señal de salida pedida y la salida correspondiente al filtro pedido ante la entrada de la señal “bass drum”.

4. Respuesta a excitaciones

Es conveniente recordar una propiedad muy importante en el análisis de redes que relaciona la respuesta en el tiempo de un circuito con la transformada de Laplace de la señal de entrada y la transferencia (ecuación 13).

$$v_o(t) = \mathcal{L}^{-1}\{H(s)V_i(s)\} \quad (13)$$

Esta propiedad se usó para todos los casos de respuestas calculada de manera teórica.

Para las simulaciones se usó el circuito simulado en PSpice de la figura 9.

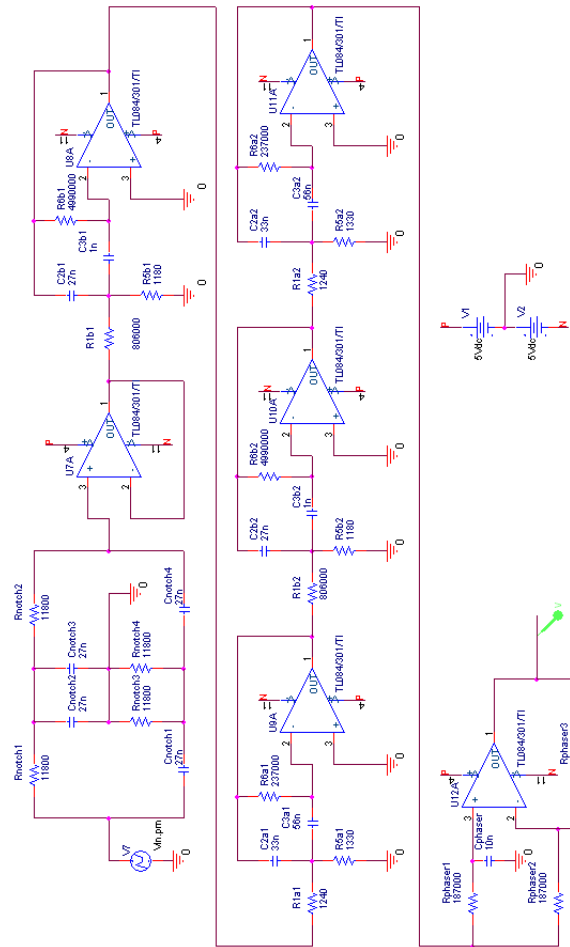


Figura 9: circuito completo simulado.

4.1. Respuesta a “bass drum”

Se muestra en la figura 10 la respuesta del circuito simulado ante la señal de entrada “bass drum” especificada en el enunciado del trabajo práctico. Es necesario

notar el parecido entre la señal obtenida en la simulación y la señal calculada teóricamente mostrada en la figura 8.

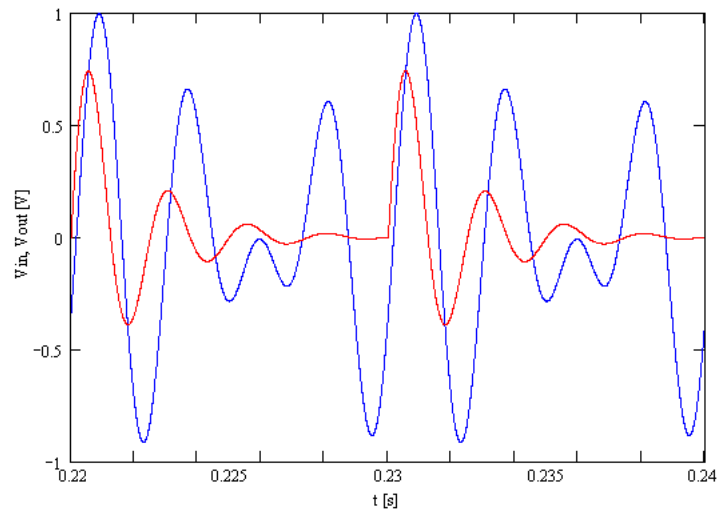


Figura 10: respuesta del filtro ante la señal “bass drum”. (Rojo) señal de entrada; (azul) señal de salida.

4.2. Respuesta al impulso

La respuesta al impulso se obtuvo multiplicando a la transferencia $Hn(s)$ por 1, que es la transformada de Laplace de la delta de Dirac; por lo tanto, al antitransformar $Hn(s)$ se obtuvo la respuesta del filtro al impulso.

Se muestra el resultado calculado en la figura 11. Se ve que la respuesta es una onda sinusoidal amortiguada, con un pico muy alto pero que se anula rápidamente.

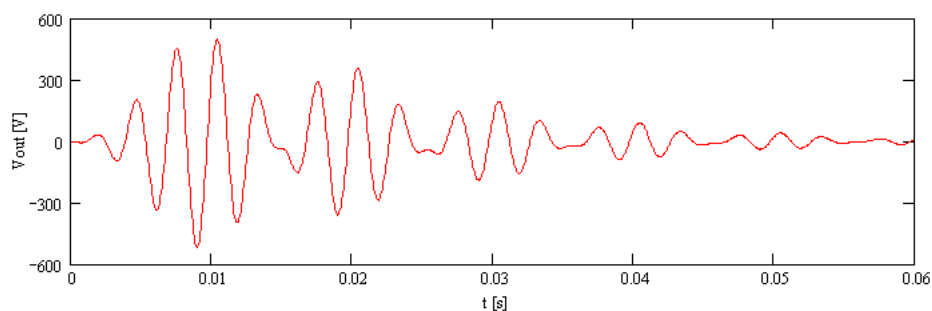


Figura 11: respuesta del filtro al impulso.

4.3. Respuesta al escalón

Se obtuvo la respuesta al escalón del filtro diseñado de dos maneras diferentes: la primera fue multiplicar a la transferencia $Hn(s)$ por $\frac{1}{s}$, que es la transformada de Laplace del escalón unitario $u(t)$. Al antitransformar la expresión resultante se obtiene la respuesta al escalón. Esta situación también se simuló en PSpice; ambos resultados están graficados en la figura 12.

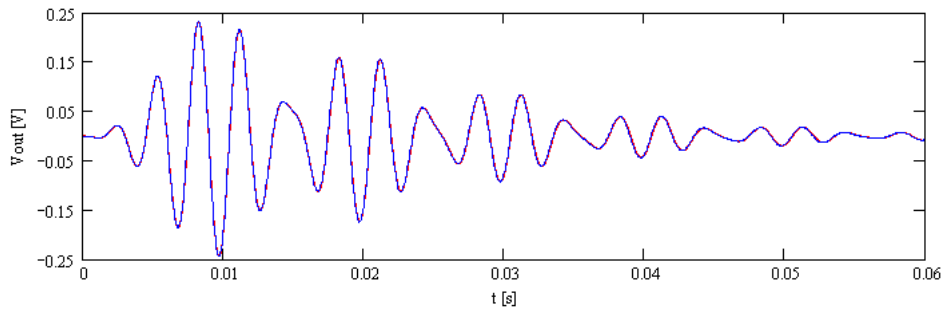


Figura 12: respuesta del filtro al escalón. (Rojo) simulación en PSpice; (azul) respuesta teórica.

4.4. Respuesta a la onda cuadrada

Se usaron los mismos métodos que para obtener la respuesta al escalón. La señal en cuestión es una cuadrada de tensión pico a pico igual a un volt, con ciclo de actividad del 50% y un período de 1 ms. Se muestra el resultado obtenido en la figura 13.

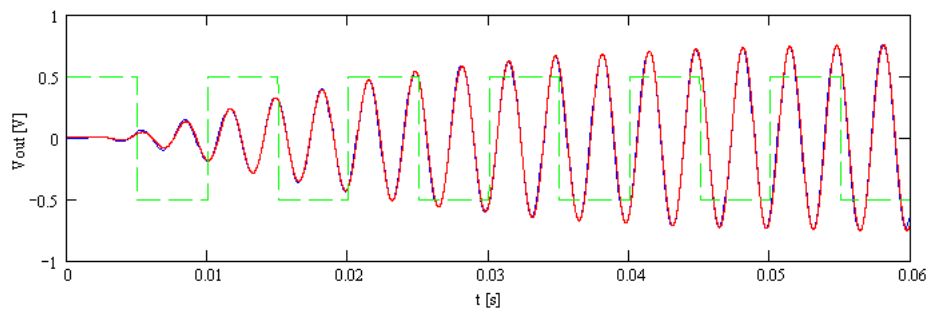


Figura 13: respuesta del filtro a la onda cuadrada. (Rojo) simulación en PSpice; (azul) respuesta teórica; (verde) señal de entrada.

4.5. Respuesta a la onda senoidal

En la figura 14 se aprecian las gráficas de las respuestas a ondas senoidales de dos frecuencias diferentes: 100 Hz y 200 Hz. Se usaron los métodos descritos anteriormente.

5. Diagrama de polos y ceros

Se muestra en la figura 15 el diagrama de polos y ceros correspondiente a la transferencia calculada.

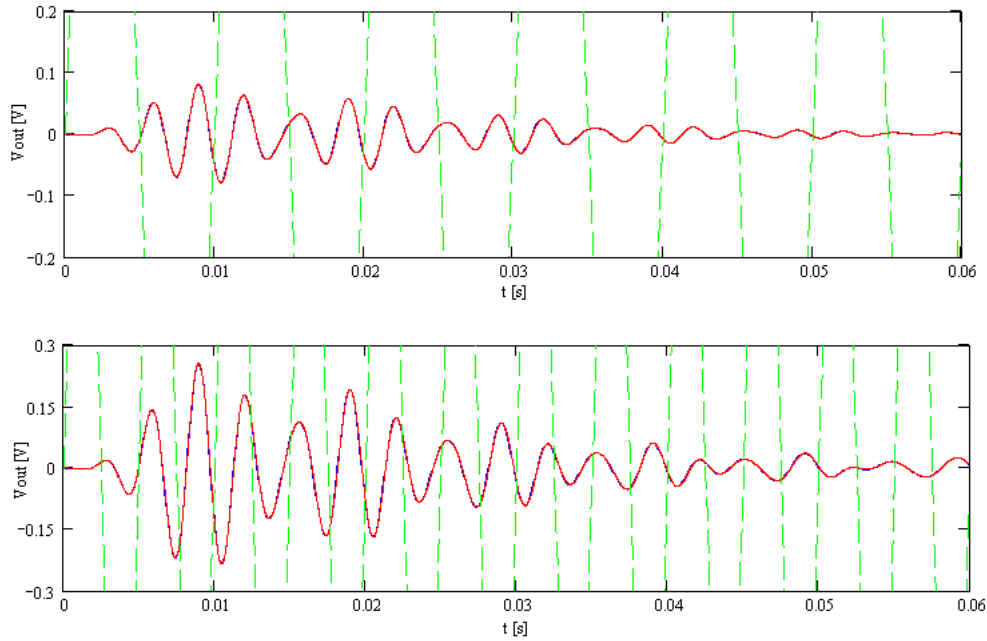


Figura 14: respuesta del filtro la onda senoidal, (arriba) de frecuencia 100 Hz; (abajo) de frecuencia 200 Hz. En ambos casos: (rojo) simulación en PSpice; (azul) respuesta teórica; (verde) señal de entrada.

6. Respuesta en frecuencia

En las figuras 16 y 17 se muestran los gráficos de la respuesta en frecuencia de amplitud y fase respectivamente para el circuito final. En ambos casos se muestra el diagrama asintótico de Bode junto con la simulación en PSpice y la transferencia calculada teóricamente.

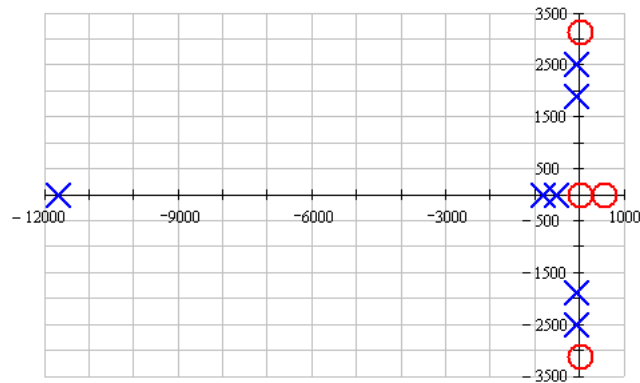


Figura 15: diagrama de polos y ceros de la transferencia.

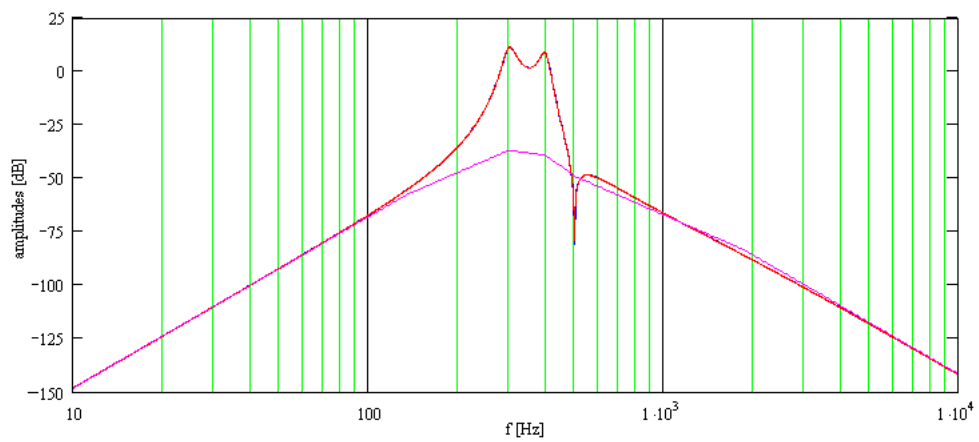


Figura 16: gráfica de la respuesta en frecuencia de la amplitud. (Rojo) simulación en PSpice; (azul) respuesta teórica; (violeta) diagrama asintótico.

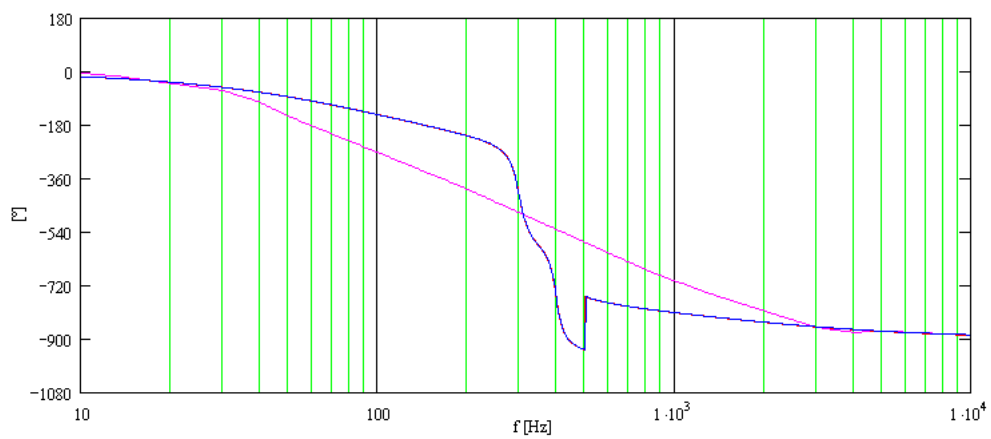


Figura 17: gráfica de la respuesta en frecuencia de la fase. (Rojo) simulación en PSpice; (azul) respuesta teórica; (violeta) diagrama asintótico.

7. Conclusiones

Los objetivos fueron alcanzados satisfactoriamente dado que se obtuvieron los resultados buscados dentro de los márgenes de error permitidos y cumpliendo las normas de realización.

Durante el desarrollo del trabajo práctico se aplicaron conceptos que fueron adquiridos en la segunda parte de la materia. En primera instancia se pudo obtener una idea concreta del efecto del factor de selectividad Q y de la ganancia H_0 en los filtros pasabandas.

También resultó un desafío interesante el hecho de tener la limitación del nivel de armónicos no deseados. Esta implicó tener que probar varias configuraciones de circuitos vistos en la cursada teniendo en cuenta, además, cuestiones de aplicación práctica como acotar a Q para que luego el circuito pueda ser implementado con amplificadores operacionales comerciales de bajo costo.

El trabajo práctico obligó a que por primera vez se esté en contacto con el proceso de normalización de componentes, visualizando como una mínima alteración de valores provocan grandes cambios en la salida del filtro.

Finalmente es necesario destacar la necesidad de usar software especializado para realizar las tareas que fueron requeridas a lo largo del proyecto.

A. Apéndice: obtención de transferencias

Se exponen a continuación los desarrollos correspondientes a las transferencias que componen al filtro diseñado.

A.1. Filtro pasabandas

Se parte del circuito de realimentación múltiple genérico, que usa cinco admittancias.

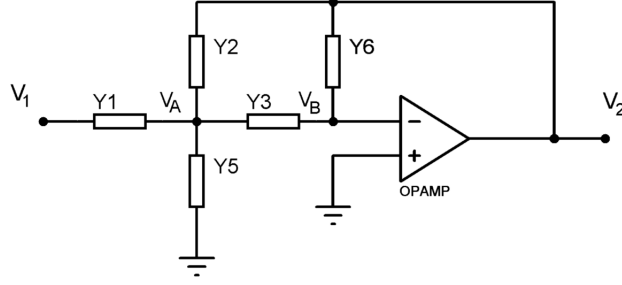


Figura A1: circuito genérico de realimentación múltiple y ganancia infinita.

Planteando tensiones de nodos en A y B:

$$V_1 Y_1 + V_2 Y_2 = V_A (Y_1 + Y_2 + Y_3 + Y_5) \quad (\text{A1})$$

$$V_2 Y_6 = -V_A Y_3 \quad (\text{A2})$$

Despejando V_A de A2 y agrupando A1 resulta:

$$V_1 Y_1 = -V_2 \left[\frac{Y_6}{Y_3} (Y_1 + Y_2 + Y_3 + Y_5) + Y_2 \right]$$

Queda definida la transferencia genérica:

$$T(s) = \frac{V_2}{V_1} = - \frac{Y_1}{\frac{Y_6}{Y_3} (Y_1 + Y_2 + Y_3 + Y_5) + Y_2}$$

Multiplicando y dividiendo por Y_3 :

$$T(s) = - \frac{Y_1 Y_3}{Y_6 (Y_1 + Y_2 + Y_3 + Y_5) + Y_2 Y_3} \quad (\text{A3})$$

Para que el filtro sea pasabandas se reemplazan los componentes genéricos por aquellos mostrados en la figura 5. Reemplazando las impedancias operaciones correspondientes en la ecuación A3 y operando para llegar a la ecuación genérica del filtro pasabandas (ecuación 3), resulta:

$$T(s) = - \frac{\frac{1}{R_1 C_2} s}{s^2 + \left[\left(\frac{1}{C_3} + \frac{1}{C_2} \right) \frac{1}{R_6} \right] s + \frac{R_1 R_5}{R_1 R_5 R_6 C_2 C_3}}$$

De esta última expresión se desprenden los resultados de las identidades 7, 8 y 9 usados en la sección 3.

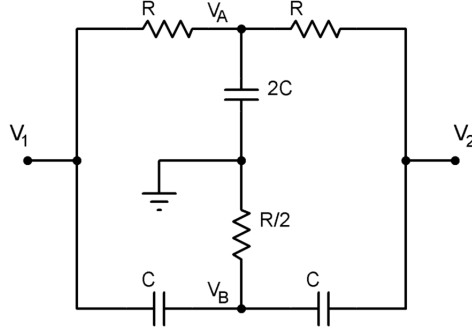


Figura A2: circuito notch “twin T”.

A.2. Filtro elimina bandas

En la figura A2 se muestra el circuito “twin T” elimina bandas.

Planteando tensiones de nodos en los nodos A , B y V_2 se obtiene el siguiente sistema de ecuaciones:

$$0 = V_A\left(\frac{2}{R} + 2sC\right) - V_1\frac{1}{R} - V_2\frac{1}{R} \quad (\text{A4})$$

$$0 = V_B\left(\frac{2}{R} + 2sC\right) - V_1sC - V_2sC \quad (\text{A5})$$

$$0 = -V_A\frac{1}{R} - V_BsC + V_2\left(\frac{1}{R} + sC\right) \quad (\text{A6})$$

Ordenando términos:

$$\frac{V_1 + V_2}{R} = 2V_A\left(\frac{1}{R} + sC\right) \quad (\text{A7})$$

$$(V_1 + V_2)sC = 2V_B\left(\frac{1}{R} + sC\right) \quad (\text{A8})$$

$$\frac{V_A}{R} + V_BsC = V_2\left(\frac{1}{R} + sC\right) \quad (\text{A9})$$

Despejando V_A de A9 a A7,

$$\frac{V_1 + V_2}{R} = 2\left(\frac{1}{R} + sC\right)[V_2(1 + sCR) - V_BsCR]$$

De esta última relación se despeja V_B ,

$$V_B = \frac{V_2(1 + sCR)}{sCR} - \frac{V_1 + V_2}{2sCR(1 + sCR)}$$

Al reemplazar V_B en A8 y operar se obtiene:

$$V_1 + V_2 + \frac{V_1 + V_2}{(sCR)^2} = \frac{2V_2(1 + sCR)^2}{(sCR)^2}$$

A partir de esta última ecuación es sencillo encontrar la transferencia $T(s)$:

$$T(s) = \frac{1 + \frac{1}{(sCR)^2}}{\frac{2(1+sCR)^2}{(sCR)^2} - \frac{1}{(sCR)^2} - 1}$$

$$T(s) = \frac{s^2 + \frac{1}{R^2 C^2}}{s^2 + \frac{4}{RC}s + \frac{1}{R^2 C^2}} \quad (\text{A10})$$

Con la definición de la ecuación 11 se obtiene la ecuación 4.

A.3. Rotador de fase

El análisis de esta transferencia se basa en el circuito de la figura 7.

Se plantea un divisor de tensión en la entrada no inversora del amplificador operacional:

$$V_+ = V_1 \frac{R}{\frac{1}{sC} + R} = V_1 \frac{sCR}{1 + sCR} \quad (\text{A11})$$

Y la tensión de nodo de la entrada inversora:

$$0 = V_- \left(\frac{1}{R} + \frac{1}{R} \right) - V_1 \frac{1}{R} - V_2 \frac{1}{R} \quad (\text{A12})$$

Dado que $V_+ = V_-$ por ser un amplificador operacional ideal, se igualan A11 y A12, obteniendo la relación:

$$\frac{V_1}{R} + \frac{V_2}{R} = V_1 \frac{sCR}{1 + sCR} \frac{2}{R}$$

Luego, la transferencia del circuito resulta:

$$T(s) = \frac{2sCR}{1 + sCR} - 1 = \frac{2sCR}{1 + sCR} - \frac{1 + sCR}{1 + sCR}$$

$$T(s) = -\frac{1 - sCR}{1 + sCR} \quad (\text{A13})$$

Finalmente, definiendo φ como en la ecuación 12 se obtiene el resultado mostrado en la ecuación 5.